13/2/c): $f(x,y) = 4x + 3y - 4$

najděte extrémy funkce f na množině

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1\}$$

Lagrangeův m. λ. Řešíme rovnice

$$g(x,y) := (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 = 0$$

$$\nabla f(x,y) + \lambda \nabla g(x,y) = 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) + \left(\lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0$$

$$4 + 2(x-1)\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1) = -\frac{2}{\lambda}$$

$$3 + \lambda \cdot 2(y-2) = 0 \qquad (y-2) = -\frac{3}{2\lambda}$$

Dosaď do rce $g(x,y) = 0$:

$$\left(-\frac{2}{\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2\lambda}\right)^2 - 1 = 0$$

$$\frac{4}{\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = 1 \qquad 4\lambda^2 = 25$$

$$\frac{25}{4\lambda^2} = 1 \qquad \lambda = \pm\frac{5}{2}$$

$$x - 1 = -\frac{2}{\lambda} = \begin{cases} -\frac{2}{\frac{5}{2}} = -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{-\frac{5}{2}} = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$y - 2 = -\frac{3}{2\lambda} = \begin{cases} -\frac{3}{2 \cdot \frac{5}{2}} = -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{-2 \cdot \frac{5}{2}} = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$\lambda = \frac{5}{2}$ P.B.: $\left[\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right]$

$\lambda = -\frac{5}{2}$ P.B.: $\left[\frac{9}{5}, \frac{13}{5}\right]$

M je uzavřená, neboť $g^{-1}(\{0\})$ (uz.), g spoj.

M je omezená (kruž.)

$\Rightarrow$ M je komp. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f nabývá na M extrémů (přes M) $\Rightarrow$

Tedy funkce f má v jednom z obou PB max, v 2. min.:

$f(x,y) = 4x + 3y - 4$ PB: $\left[\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right], \left[\frac{9}{5}, \frac{13}{5}\right]$.

$f\left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right) = \frac{4}{5} + \frac{21}{5} - 4 = 1$ ... min.

$f\left(\frac{9}{5}, \frac{13}{5}\right) = \frac{36}{5} + \frac{39}{5} - 4 = \frac{55}{5} = 11$ ... max.

$\nabla f(x,y) = (4, 3)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$\|\nabla f(x,y)\| = 5$ diam $M = 2$

13/2/g) $f(x,y) = x^2 + y^2$ ... extr. přes $g(x,y)$

$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4 = 0\}$

∃ RCE: $g(x,y) = 0 \quad \wedge \quad \nabla f(x,y) + \lambda \cdot \nabla g(x,y) = 0$

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4 = 0$$

$$2x + \lambda \cdot (10x - 6y) = 0 \qquad x + \lambda(5x - 3y) = 0$$

$$2y + \lambda \cdot (-6x + 10y) = 0 \qquad y + \lambda(5y - 3x) = 0$$

$$(5\lambda+1) \cdot x - 3\lambda \cdot y = 0 \quad / \cdot 3\lambda$$

$$(5\lambda+1) \cdot y - 3\lambda \cdot x = 0 \quad / \cdot (5\lambda+1)$$

$$(5\lambda+1) \cdot 3\lambda x - 9\lambda^2 y = 0$$

$$-(5\lambda+1) \cdot 3\lambda x + (5\lambda+1)^2 y = 0$$

$$\Big(\underbrace{(5\lambda+1)^2 - 9\lambda^2}\Big) y = 0$$

$$25\lambda^2 + 10\lambda + 1 - 9\lambda^2$$

$$16\lambda^2 + 10\lambda + 1 = (4\lambda + \tfrac{5}{4})^2 - \tfrac{9}{16}$$

Kdyby $y = 0$:

Tedy $y \neq 0$

a zároveň analogicky $x \neq 0$.

$$(5\lambda+1) x = 3\lambda y \quad \Rightarrow \quad (5\lambda+1) \cdot x = 0$$

$$(5\lambda+1) y = 3\lambda x$$

$0 \qquad \cancel{0} \Leftarrow x \neq 0$

$$5\lambda + 1 = 0$$

$$0 \cdot y = 3\lambda x$$

$$\Downarrow$$

$$3\lambda = 0 \quad (x \neq 0) \quad ↯$$

$$16\lambda^2 + 10\lambda + 1 = 0 \qquad x_{1,2}$$

$$(4\lambda + \tfrac{5}{4})^2 = \tfrac{9}{16} \qquad \lambda = \frac{\pm\frac{3}{4} - \frac{5}{4}}{4} = \begin{cases} -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\lambda = -\frac{1}{8}$: $\quad (-\frac{5}{8} + 1) \cdot x + \frac{3}{8} y = 0$

$$x + y = 0, \quad x = -y$$

$$5x^2 + 6x^2 + 5x^2 = 4$$

$$16x^2 = 4 \qquad x^2 = \tfrac{1}{4} \qquad x = \pm\tfrac{1}{2} \qquad y = \mp\tfrac{1}{2}$$

P.B. $[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}], [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$\left(-\frac{5}{2}+1\right)x + \frac{3}{2}y = 0$

$-\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y \qquad x = y$

P.B. $[1,1]$, $[-1,-1]$

$4x^2 - 4 = 0 \qquad x = \pm 1$

$f(x,y) = x^2 + y^2$

$f(1,1) = 2$, $f(-1,-1) = 2$ maxima přes M.

$f\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ $f\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ minima přes M.

Jsou to současně ostrá lokální max (resp. min) přes množinu M?

$M = \{(x,y) : 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4 = 0\}$

$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4 =$

$\bar{\bar{A}} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \det A = 16 > 0$

$f(x,y) = 2x^3 + 9xy^2 + 15x^2 + 27y^2$

12/1/c)

najděte lok. extrémy na $\mathbb{R}^2$

P.B. pro stacionární body.

f_x: $6x^2 + 9y^2 + 30x = 0$

f_y: $18xy + 54y = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y(18x + 54) = 0$ $\quad y = 0$ $\quad x = -3$

$\underline{y = 0}$: $6x^2 + 30x = 0$ $\qquad x^2 + 5x = 0$

$x \cdot (x+5) = 0$

$x = 0 \qquad x = -5$

P.B. [0,0], [-5,0]

$\underline{x = -3}$: $54 + 9y^2 - 90 = 0$

$9y^2 = 36$

$y^2 = 4 \qquad y = 2,\ -2$

P.B. [-3,2], [-3,-2]

Hessova matice:

$$d^2f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x+30 & 18y \\ 18y & 18x+54 \end{pmatrix}$$

[0,0]: $\begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 54 \end{pmatrix}$ ... P.D. $\Rightarrow$ [0,0] je bod minima

[-5,0]: $\begin{pmatrix} -30 & 0 \\ 0 & -36 \end{pmatrix}$ ... N.D. $\Rightarrow$ [-5,0] je bod. max.

[-3,2]: $\begin{pmatrix} \boxed{-6}^{<0} & 36 \\ 36 & 0 \end{pmatrix}$ ... není ND, protože je det <0, je ID

[-3,2] je sedlový bod f.

[-3,-2]: $\begin{pmatrix} \boxed{-6}^{<0} & -36 \\ -36 & 0 \end{pmatrix}$ opět ID, a tedy nejde o bod extrému.

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\cdot e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_x = 2x\cdot e^{-(x^2+y^2)} + (x^2+y^2)\cdot e^{-(x^2+y^2)}\cdot(-2x)$$

$$= \underbrace{e^{-(x^2+y^2)}}_{>0}\cdot 2x\,(1-x^2-y^2) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x=0 \quad \vee \quad x^2+y^2=1$$

$$f_y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y=0 \quad \vee \quad x^2+y^2=1$$

$$x=0 \Rightarrow 2y\cdot e^{-y^2}\cdot(1-y^2) = 0$$

$$y=0 \quad \vee \quad y=\pm 1$$

<u>P.B.:</u> $[0,0]$, $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$

nekonečně mnoho PB.

Nechť (x,y) splňuje $x^2+y^2=1$.

$$f(x,y) = 1\cdot e^{-1} = e^{-1}.$$

Je tam extrém? Přes Hessián ne:

Derivace budou příliš složité.

Správný způsob: $g(t) = t\cdot e^{-t}$ vyšetřením zjistíme, že má přes $[0,\infty)$ maximum v bodě 1. $g'(1) = 0$.

Tedy všechny body $\{x^2+y^2=1\}$ jsou body lok. maxima, dokonce globálního, ale <u>ne ostrého</u>.